Учимся считать! – задачи

1. Докажите следующие тождества двойным подсчётом:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

2. Пусть дано натуральное n. Тогда $\tau(n)$ — это число различных делителей n (включая 1 и n). Докажите, что $\sum_{i=1}^{n}\tau(i) = \sum_{j=1}^{n}\lfloor\frac{n}{j}\rfloor$. Выведите отсюда, что среднее число делителей у числа между 1 и n примерно равно $\log n$.

3. Комбинаторные дизайны.

   [а] Пусть $\ell \le k \le n$ и нам дан набор $\mathcal{F}$ k-элементных подмножеств n-элементного множества со следующим свойством: любое ℓ-элементное подмножество содержится не более чем в 1 подмножестве из $\mathcal{F}$. Покажите, что $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\ell}/\binom{k}{\ell}$.

   [б] В условиях предыдущего пункта, докажите, что существование такого $\mathcal{F}$ возможно только если $\binom{k-i}{\ell-i}$ делит $\binom{n-i}{\ell-i}$ для каждого $i = 0, \dots, \ell$.

4.* Пусть даны множества $A_1, \dots, A_m$, каждое размера k, и при этом $|A_i \cap A_j| \le r$. Тогда мощность объединения всех этих множеств не менее $\frac{k^2 m}{k+(m-1)r}$.

   Подсказка. *Используйте матрицу, в которой строки соответствуют элементам множества, столбцам – подмножествам, а в каждой ячейке стоит или 0, или количество множеств, содержащих данный элемент (вместо „обычной" единицы).*

5. Пусть граф G на n вершинах с e рёбрами не содержит подграфа $K_{2,t}$ (то есть, полного двудольного графа с 2 вершинами в одной доле и t вершинами в другой доле). докажите, что $e \le t^{1/2} n^{3/2}$.

6.* Пусть граф G на n вершинах с e рёбрами не содержит подграфа $K_{t,t}$ (то есть, полного двудольного графа с t вершинами в одной доле и t вершинами в другой доле). Докажите, что $e \le tn^{2-1/t}$.

> **Подсказка.** *Рассуждайте так же, как и в доказательстве теоремы о циклах длины 4, только подсчитывать нужно немного другую величину. Вам потребуется неравенство Гёльдера.*

7. Назовём выпуклое тело на плоскости телом постоянной ширины 1, если его проекция на любую прямую имеет длину 1. (Отметим, что круг диаметром 1 является телом постоянной ширины.) Докажите, что граница любого тела постоянной ширины 1 на плоскости имеет длину π.

8. Найдите вероятность того, что при случайном выборе 4 точек на сфере в $\mathbb{R}^3$ тетраэдр, образованный этими точками, содержит центр сферы. Обобщите это на случай произвольной размерности.

9.** Выведите формулу для вероятности того, что случайно выбранные t точек на d-мерной сфере содержат центр сферы в своей выпуклой оболочке.

> **Подсказка.** *Для решения вам потребуется знать, что такое преобразование Гейла, а также так называемую Upper Bound Theorem, которая даёт точную верхнюю оценку числа граней любой размерности у многогранника в $\mathbb{R}^d$ с n вершинами.*

10.* Докажите, что число пар точек на расстоянии 1 среди n точек на плоскости не может превосходить $100n^{4/3}$.

> **Подсказка.** *Рассуждайте так же, как и в доказательстве теоремы Семереди-Троттера. Для начала нужно свести задачу о единичных расстояниях к задаче об инцидентностях окружностей и точек, а далее использовать лемму о пересечениях.*