Пусть H — остовный подграф G (т.е. у H и у G одинаковые множества вершин, а любое ребро из H является ребром и в G). Перколяцией называется процесс, в котором на каждом шаге добавляется одно ребро, и таким образом из графа H получается граф G. Пусть F — некоторый другой граф (как правило его размер сильно меньше размера графа G). Тогда F-перколяцией называется такая перколяция, при которой на каждом шаге в строящийся граф добавляется хотя бы одна новая "копия" графа F.

С помощью F-перколяции моделируют многие физические явления, а также процессы распространения эпидемий. Зададимся следующим фундаментальным вопросом. Каково наименьшее количество ребер в графе H таком, что существует F-перколяция в G? Пусть, например, G — полный граф на n вершинах, а F — треугольник. Несложно доказать, что в таком случае ответ на поставленный вопрос $n-1$. Рассмотренный частный случай нашей задачи можно переформулировать следующим образом. В некотором коллективе n человек, среди которых есть m пар знакомых. Если у кого-то есть пара знакомых, то когда-нибудь они познакомятся и между собой. Каково минимальное m, при котором все пары когда-нибудь познакомятся?

В нашем частном случае задача решается элементарными комбинаторными рассуждениями, но если F — не треугольник, а, скажем, полный граф на 4 вершинах, то задача становится гораздо сложнее, и для ее решения используется линейная алгебра. В курсе мы научимся решать задачу в простейших случаях, а также попробуем поговорить и про линейно–алгебраический метод.

Слабое насыщение в K_n

1. Найдите $\mathrm{wsat}(K_n, K_{1,t})$.
2. Найдите $\mathrm{wsat}(K_6, K_{3,3})$.
3. Найдите $\mathrm{wsat}(K_{2t}, K_{t,t})$.
4. Докажите, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_s) \le \binom{n}{2} - \binom{n-s+2}{2}$.
5. Докажите, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t}) \le (t-1)(n+1-t/2)$.
6. Докажите, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t}) \ge (t-1)n/2$.
7. Найдите $\mathrm{wsat}(K_n, K_{2,3})$.

Линейная алгебра

1. Докажите, что $0 \cdot x = \mathbf{0}$ для любого $x \in V$.

2. Докажите, что $-x = (-1) \cdot x$ для любого $x \in V$.

3. Докажите единственность $\mathbf{0} \in V$.

4. Докажите, что мощности конечных базисов одного и того же линейного пространства одинаковы.

5. Пусть U_1, U_2 — линейные подпространства линейного пространства V. Верно ли, что $U_1 \cap U_2$ — тоже линейное подпространство? А $U_1 \cup U_2$?

6. Докажите лемму о нижней оценке числа слабого насыщения в терминах размерности линейного пространства.

   Лемма. Пусть G, F — графы, W — линейное пространство, а $f : E(G) \to W$ — такое отображение, что для любой копии F' графа F в G найдутся такие числа $c_e \neq 0$, $e \in E(F')$, что $\sum_{e \in E(F')} c_e f(e) = 0$. Тогда $\mathrm{wsat}(G, F) \geq \dim\langle f(e),\ e \in E(G)\rangle$.

7. Пусть $G = K_n$, $F = K_3$. Придумайте такое линейное пространство W и отображение $f : E(G) \to W$, что $\dim\langle f_e, e \in E(G)\rangle = n - 1$, и для любого треугольника, состоящего из вершин x, y, z, в G найдутся такие числа $c_1, c_2, c_3 \neq 0$, что $c_1 f(\{x, y\}) + c_2 f(\{x, z\}) + c_3 f(\{y, z\}) = 0$.

   Тем самым, $\mathrm{wsat}(K_n, K_3) \geq n - 1$.

Построение линейного пространства и отображения

1. Пусть $m \le n$. Докажите, что в $\mathbb{R}^m$ существуют n векторов в общем положении.

2. Под *конкатенацией* векторов $u = (u_1, \ldots, u_s)$, $v = (v_1, \ldots, v_t)$ подразумевается вектор $uv = (u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t)$. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — базис в $\mathbb{R}^s$, $y_1, \ldots, y_t$ — базис в $\mathbb{R}^t$. Верно ли, что найдутся $a \in \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^t$ такие, что $x_1b, \ldots, x_sb, ay_1, \ldots, ay_t$ — базис в $\mathbb{R}^{s+t}$? Верно ли, что для любых $a \in \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^t$ $x_1b, \ldots, x_sb, ay_1, \ldots, ay_t$ — базис в $\mathbb{R}^{s+t}$?

3. Пусть $m < n$, а $u_1, \ldots, u_n$ — векторы в общем положении в $\mathbb{R}^m$. Верно ли, что найдутся такие ненулевые $c_1, \ldots, c_n$, что $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n = 0$?

4. Докажите, что размерность системы векторов, построенной на лекции, $\dim\langle f(e), e \in K_n\rangle$ не меньше чем $(t-1)(n-t+1)$. Для этого рассмотрите $Y \subset \{1, \ldots, n\}$ мощности $|Y| = t-1$ и докажите, что векторы $f(\{x, y\})$, $x \in Y$, $y \notin Y$, линейно независимы.

5. Пусть количество вершин графа F меньше чем n. Докажите, что $\mathrm{wsat}(K_n \backslash e, F) = \mathrm{wsat}(K_n, F)$, где граф $K_n \setminus e$ получен из K_n удалением одного ребра.

wsat для двудольных и многодольных шаблонов

1. Докажите, что для всех $t \geq 2$ и $n \geq 2t+1$ справедливо $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t+1}) \leq (t-1)(n+1-t/2)+1$.

2. Докажите, что для всех $t \geq 2$ и $n \geq 3t-3$ справедливо $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t+1}) \geq (t-1)(n+1-t/2)+1$. При доказательстве достаточно воспользоваться тем, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t}) \geq (t-1)(n+1-t/2)$.

3. Докажите, что для всех $2 \leq t < s$ и $n \geq 2(t+s)-3$ справедливо $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,s}) \leq (t-1)(n-t) + \binom{s}{2}$.

4. Докажите, что для всех $2 \leq t < s$ и $n \geq 3s-3$ справедливо $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,s}) \geq (t-1)(n-s+1) + \binom{s}{2}$. При доказательстве достаточно воспользоваться тем, что $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t}) \geq (t-1)(n+1-t/2)$.

5. Докажите, что для всех $t \geq 2$ и $n \geq 3t$ справедливо $\mathrm{wsat}(K_n, K_{t,t,t}) \leq (2t-1)(n-3t+1) + \frac{t(7t-5)}{2}$.