Разбиения и диаграммы Юнга

Задача 1. Производящей функцией какой последовательности является ряд

а) $\dfrac{1}{(1-q)^2}$; **б)** $\dfrac{1}{(1-q)^3}$; **в)** $\dfrac{1}{(1-q)^n}$?

Задача 2. Вычислите бесконечное произведение

$$(1+q+q^2+\ldots+q^9)(1+q^{10}+q^{20}+\ldots+q^{90})(1+q^{100}+\ldots+q^{900})\ldots$$

Задача 3. Докажите, что производящая функция для числа диаграмм Юнга заданного полупериметра равна $\frac{q^2}{1-2q}$.

Задача 4. Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие m, равняется числу разбиений на не более чем m слагаемых.

Задача 5. Постройте явную биекцию между разбиениями числа в сумму различных слагаемых и в сумму нечетных слагаемых (как на лекции или ещё как-нибудь).

Разбиение называется *самосопряженным*, если соответствующая диаграмма Юнга симметрична относительно диагонали.

Задача 6. а) Постройте биекцию между множеством самосопряженных разбиений числа n и множеством его разбиений в сумму *различных нечетных* слагаемых.

б) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

Задача 7. а) Докажите, что $\displaystyle\prod_n \frac{1}{(1-q^n)} = \sum_r \frac{q^{r^2}}{[(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)]^2}$.

б) Вычислите $\displaystyle\sum_r \frac{q^{r(r+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}$.

Задача 8. С помощью пентагональной теоремы Эйлера найдите числа разбиений $p(n)$ при $n \le 20$.

Для получения зачета достаточно сдать семь пунктов задач.

Евгений Юрьевич Смирнов: `esmirnov@hse.ru`