

Продвинутые задачи к курсу Райгородского

17 августа 2020 г.

Задача 1. Бывают ли графы $G = (V, E)$, у которых $\omega(G) > 100 \frac{|V|}{\alpha(G)}$?

Задача 2. Бывают ли графы $G = (V, E)$, у которых $\omega(G) < \frac{|V|}{100\alpha(G)}$?

Задача 3. Каких графов на 100 вершинах больше — тех, для которых $\omega(G) > \frac{|V|}{\alpha(G)}$, или тех, для которых $\omega(G) \leq \frac{|V|}{\alpha(G)}$?

Задача 4. Пусть G — граф, вершины которого те же, что у $KG_{n,r}$, но ребра возникают тогда и только тогда, когда вершины либо не пересекаются (как у Кнезера), либо пересекаются по одному элементу. Чему равно число независимости графа G ?

Задача 5 (конкурсная). Найдите как можно более точные нижние оценки чисел независимости следующих графов:

1. графа $G = (V, E)$, где

$$V = \{A \subset \mathcal{R}_{20} : |A| = 10\}, \quad E = \{\{A, B\} : A, B \in V, |A \cap B| \leq 4\}.$$

2. графа $G = (V, E)$, где

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_8) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, x_1^2 + \dots + x_8^2 = 4\},$$

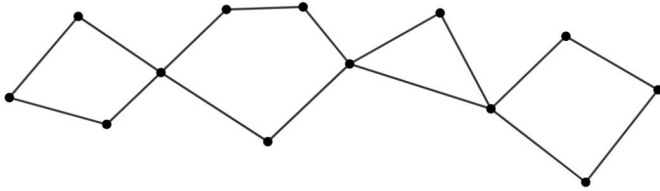
$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, x_1y_1 + \dots + x_8y_8 = 0\}.$$

3. графа $G = (V, E)$, где

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16}) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, x_1^2 + \dots + x_{16}^2 = 8\},$$

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, x_1y_1 + \dots + x_{16}y_{16} = 0\}.$$

Задача 6. Назовем *ожерельем* с l бусинками граф, состоящий из l циклов, сцепленных в одну цепочку. Например, на рисунке показано ожерелье с 4 бусинками. Два соседних цикла должны иметь ровно одну общую вершину, несоседние циклы общих вершин не имеют.



Докажите, что если граф G не содержит ожерелий с l бусинками, то вершины G можно правильно покрасить в $2l$ цветов.