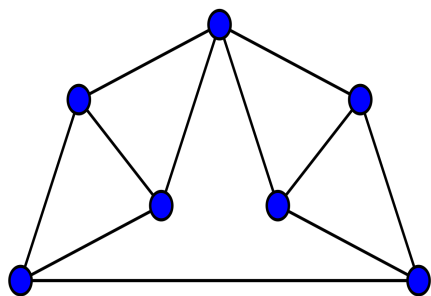


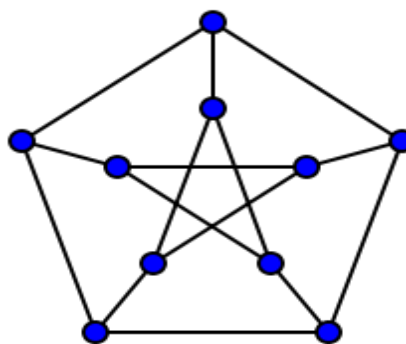
# Задачи к курсу Райгородского

17 августа 2020 г.

**Задача 1.** Найдите хроматическое число следующих графов:



(a)



(b)

**Задача 2.** Пусть вершины  $G$  – это 2-элементные подмножества 6-элементного множества, которые соединены ребром, если они *пересекаются*. Чему равно хроматическое число этого графа? Как этот граф связан с кнезеровскими графами?

**Задача 3.** Тот же вопрос про 2-элементные подмножества 7-элементного множества.

**Задача 4.** Что из себя представляют кнезеровские графы  $KG_{n,0}$  и  $KG_{2n,n}$ ?

*Жадный алгоритм* покраски графа  $G$  устроен следующим образом: пусть

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

– это вершины графа  $G$ , выписанные в каком-то порядке. На  $i$ -том шаге алгоритма мы красим вершину  $v_i$  в минимальный по номеру цвет так, чтобы не возникло одноцветного ребра между  $v_i$  и какой-то из уже покрашенных вершин (то есть с  $v_1, \dots, v_{i-1}$ ). По итогу работы жадного алгоритма получается некоторая раскраска вершин графа  $G$ .

**Задача 5.** Докажите, что если каждая вершина графа  $G$  имеет степень не больше некоторого числа  $d$ , то хроматическое число  $G$  не превосходит  $d + 1$ .

**Задача 6.** Можно ли в задаче 5 заменить  $d + 1$  на  $d$ ?

**Задача 7.** а) Приведите пример графа  $G$  и такого упорядочивания его вершин, что жадный алгоритм выдаст неоптимальную раскраску  $G$ , то есть чтобы число задействованных цветов превосходило хроматическое число  $G$ .

б) Докажите, что всегда можно упорядочить вершины графа  $G$  таким образом, чтобы жадный алгоритм выдавал раскраску  $G$  в оптимальное число цветов.

**Задача 8.** Докажите, что граф  $G$  можно правильно раскрасить в 2 цвета тогда и только тогда, когда в  $G$  нет нечетных циклов.

**Задача 9.** Для каких значений параметров  $n, k$  кнезеровский граф  $KG_{n,k}$  можно правильно раскрасить в 2 цвета?

**Задача 10.** Найдите число треугольников в  $KG_{n,k}$ .