

Задачи по топологии к курсу Райгородского

21 августа 2020 г.

Через S^n мы обозначаем n -мерную сферу единичного радиуса, вложенную в $(n+1)$ -мерное пространство \mathbb{R}^{n+1} стандартным образом.

Задача 1. Определите, какие из следующих подмножеств S^1 являются открытыми, какие замкнутыми, а какие не замкнуты и не открыты.

1. $\{(x, y) \in S^1 \mid x \geq 0\}$,
2. $\{(x, y) \in S^1 \mid y > -1\}$,
3. $\{(x, y) \in S^1 \mid x < 0, y \geq 0.5\}$,
4. $\{(x, y) \in S^1 \mid x + y < 2\}$,
5. $\{(x, y) \in S^1 \mid x - y \geq 1.5\}$.

Задача 2. Рассмотрим 3 множества на сфере S^2 :

$$A = \{(x, y, z) \mid x \geq 0.6\}, B = \{(x, y, z) \mid y > 0.6\}, C = \{(x, y, z) \mid z \leq -0.6\}.$$

Какие из следующих множеств открыты, замкнуты, не открыты и не замкнуты: $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$?

Задача 3. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1. В любом покрытии окружности двумя *открытыми* множествами найдется множество, содержащее 2 диаметрально противоположные точки окружности.
2. В любом покрытии окружности двумя *замкнутыми* множествами найдется множество, содержащее 2 диаметрально противоположные точки окружности.

Задача 4. Докажите также равносильность утверждений предыдущей задачи следующему:

3. Если S^1 покрыта одним замкнутым и одним открытым множеством, то одно из них содержит пару диаметрально противоположных точек окружности.

Задача 5*. Сформулируйте и докажите многомерные аналоги задач 3 и 4.

Функция $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любой точки сферы $\bar{v} \in S^2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая открытая окрестность U_ε точки \bar{v} , что $f(U_\varepsilon)$ содержится в интервале $(f(\bar{v}) - \varepsilon, f(\bar{v}) + \varepsilon)$.

Задача 6. Какие из следующих функций от вектора $\bar{v} = (x, y, z) \in S^2$ являются непрерывными?

1. $f(\bar{v}) = x$,
2. $f(\bar{v}) = x^2 + y^2 + z^2$,
3. $f(\bar{v}) = 1/y$,
4. $f(\bar{v}) = \max\{|x|, |y|, |z|\}$,
5. $f(\bar{v})$ равно 1, если $z > 0$ и равно -1 иначе.

Задача 7. Докажите равносильность следующих утверждений:

1. В любом покрытии сферы S^2 тремя *замкнутыми* множествами найдется множество, содержащее 2 диаметрально противоположные точки сферы.
2. В данный момент на Земле найдутся 2 противоположные точки, в которых одновременно совпадают температура и давление.