О неразделимых кругах и шапочках

Александр Полянский[1]

[1]Лаборатория комбинаторных и геометрических структур
Московский Физико-Технический Институт

21 августа 2020 г.

План работы

План работы

Теорема о покрытии кругами

Набор K кругов на плоскости называется неразделимым, если не существует разделяющей прямой для этого набора, то есть прямой , которая не пересекает ни один из круговии при этом делит множество кругов на два непустых множества.

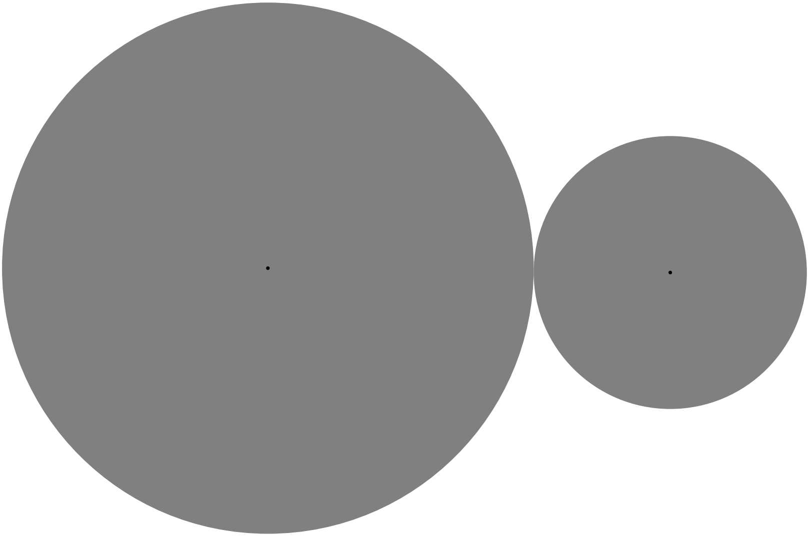
Теорема о покрытии кругами

Набор K кругов на плоскости называется неразделимым, если не существует разделяющей прямой для этого набора, то есть прямой , которая не пересекает ни один из кругови при этом делит множество кругов на два непустых множества.
(Следующая теорема была гипотезой Эрдёша.)

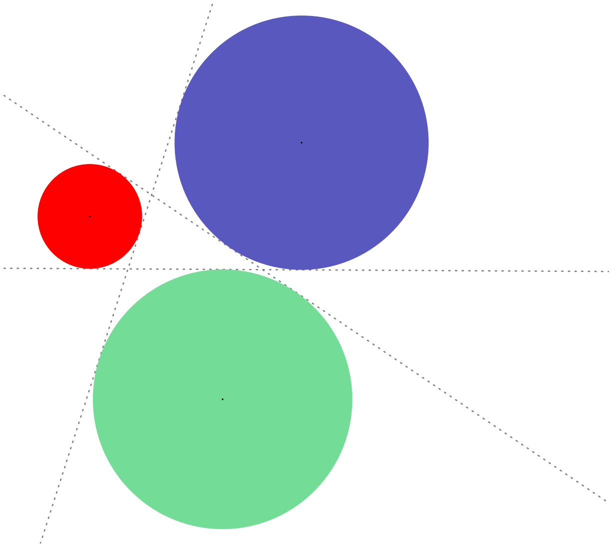
Теорема (Гудман & Гудман 1945)

Конечный неразделимый набор K кругов на плоскости может быть покрыт кругом, радиус которого равен сумме радиусов кругов из K.

Примеры



Примеры



Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$. Набор отрезков $B_{r_1}(a_1), \dots, B_{r_n}(a_n)$ на прямой назвается неразделимым, если не найдётся точки этой прямой такой, что она не лежит ни в одном из отрезков, но при этом она делит множетсво отрезков на два непустых множества.

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$. Набор отрезков $B_{r_1}(a_1), \ldots, B_{r_n}(a_n)$ на прямой назвается неразделимым, если не найдётся точки этой прямой такой, что она не лежит ни в одном из отрезков, но при этом она делит множетсво отрезков на два непустых множества.

1-мерная версия теоремы Гудманов

Неразделимый набор отрезков может быть покрыто отрезком, длина которого равна сумме длин отрезков.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$. Набор отрезков $B_{r_1}(a_1), \ldots, B_{r_n}(a_n)$ на прямой назвается неразделимым, если не найдётся точки этой прямой такой, что она не лежит ни в одном из отрезков, но при этом она делит множетсво отрезков на два непустых множества.

1-мерная версия теоремы Гудманов

Неразделимый набор отрезков может быть покрыто отрезком, длина которого равна сумме длин отрезков.

- Если есть неразделимый набор отрезков, то найдутся два пересекающихся. Тогда мы их можем покрыть нужным образом и дальше применяем индукцию по числу отрезков.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$. Набор отрезков $B_{r_1}(a_1), \ldots, B_{r_n}(a_n)$ на прямой назвается неразделимым, если не найдётся точки этой прямой такой, что она не лежит ни в одном из отрезков, но при этом она делит множетсво отрезков на два непустых множества.

1-мерная версия теоремы Гудманов

Неразделимый набор отрезков может быть покрыто отрезком, длина которого равна сумме длин отрезков.

- Если есть неразделимый набор отрезков, то найдутся два пересекающихся. Тогда мы их можем покрыть нужным образом и дальше применяем индукцию по числу отрезков.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(a)$ отрезок на числовой прямой с центром в точке a и длины $2r$. Набор отрезков $B_{r_1}(a_1), \dots, B_{r_n}(a_n)$ на прямой назвается неразделимым, если не найдётся точки этой прямой такой, что она не лежит ни в одном из отрезков, но при этом она делит множетсво отрезков на два непустых множества.

1-мерная версия теоремы Гудманов

Неразделимый набор отрезков может быть покрыто отрезком, длина которого равна сумме длин отрезков.

- Если есть неразделимый набор отрезков, то найдутся два пересекающихся. Тогда мы их можем покрыть нужным образом и дальше применяем индукцию по числу отрезков.

Но мы можем применить более концептуальную лемму.

Доказательство теоремы Гудмановa

- Пусть отрезки $B_{r_1}(a_1)$ и $B_{r_2}(a_2)$ пересекаются, то их можно покрыть отрезком $B_{r_1+r_2}(a)$, где $a = \frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{r_1 + r_2}$.

Доказательство теоремы Гудманов

- Пусть отрезки $B_{r_1}(a_1)$ и $B_{r_2}(a_2)$ пересекаются, то их можно покрыть отрезком $B_{r_1+r_2}(a)$, где $a = \frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{r_1 + r_2}$.
- Применяя индукцию докажите, что отрезок $B_{r_1+\dots+r_n} \quad \frac{r_1 \mathbf{a}_1 + \dots + r_n \mathbf{a}_n}{r_1 + \dots + r_n}$ покрывает отрезки $B_{r_1}(a_1), \dots, B_{r_n}(a_n)$, если те неразделимы.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(\mathbf{a})$ круг на плоскости с центром в точке $\mathbf{a}$ и радиуса r.

- Рассмотрим точку $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1 + \dots + r_n\mathbf{a}_n}{r_1 + \dots + r_n}$ (центр масс). Попробуем убедиться, что круг $B_{r_1 + \dots + r_n}(\mathbf{a})$ искомый.

Доказательство теоремы Гудманов

Обозначим через $B_r(\mathbf{a})$ круг на плоскости с центром в точке $\mathbf{a}$ и радиуса r.

- Рассмотрим точку $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1 + \dots + r_n\mathbf{a}_n}{r_1 + \dots + r_n}$ (центр масс). Попробуем убедиться, что круг $B_{r_1 + \dots + r_n}(\mathbf{a})$ искомый.
- Рассмотрим произвольную прямую , проходящую через $\mathbf{a}$ и спроецируем все круги на эту прямую. Проекциями кругов будет отрезки длины $2r_1, \dots, 2r_n$ с центрами в точках $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Полученный набор отрезков будет неразделимым.

Доказательство теоремы Гудманов

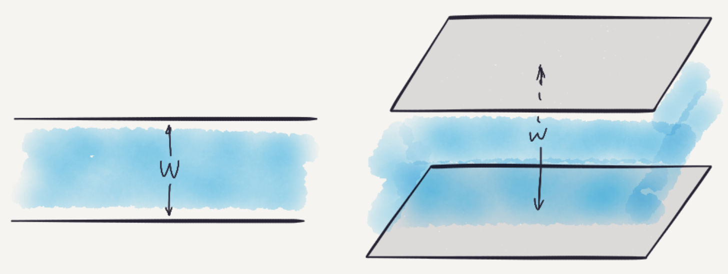
Обозначим через $B_r(\mathbf{a})$ круг на плоскости с центром в точке $\mathbf{a}$ и радиуса r.

- Рассмотрим точку $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1 + \dots + r_n\mathbf{a}_n}{r_1 + \dots + r_n}$ (центр масс). Попробуем убедиться, что круг $B_{r_1+\dots+r_n}(\mathbf{a})$ искомый.
- Рассмотрим произвольную прямую , проходящую через $\mathbf{a}$ и спроецируем все круги на эту прямую. Проекциями кругов будет отрезки длины $2r_1, \dots, 2r_n$ с центрами в точках $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Полученный набор отрезков будет неразделимым.
- Можно убедиться в том, что $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1^{\square} + \dots + r_n\mathbf{a}_n^{\square}}{r_1 + \dots + r_n}$ (домашнее задание). Тогда отрезок прямой   длины $2(r_1 + \cdots + r_n)$ с центром в точке $\mathbf{a}$ покрывает неразделимый набор отрезков на прямой.
- Так как это выполняется для любой прямой через $\mathbf{a}$, то получаем, что $B_{r_1+\dots+r_n}(\mathbf{a})$ покрывает изначальный набор кругов.

План работы

1. Теорема Гудмана–Гудмана о покрытии кругами
2. История
3. Гипотеза Лазло Фейеш Тота
4. Слабый сферический аналог теоремы Гудманов
5. Доказательство гипотезы Фейеш Тота
6. Сферическая теорема Гудмана и Гудмана

Полоска



Полоской (или дощечкой) ширины w назвается часть пространства $\mathbb{R}^3$, которая лежит между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии w.

Задача Тарского о дощечках

Ширина выпуклого тела K — это наименьшая ширина полоски покрывающей K.

Задача Тарского о дощечках

Ширина выпуклого тела K — это наименьшая ширина полоски покрывающей K.

Теорема (Моэзе, 1933; Тарский, 1933)

Если круг покрыт полосками, то их суммарная ширина по крайней мере ~~диаметр~~ ширина круга.

Ширина выпуклого тела K — это наименьшая ширина полоски покрывающей K.

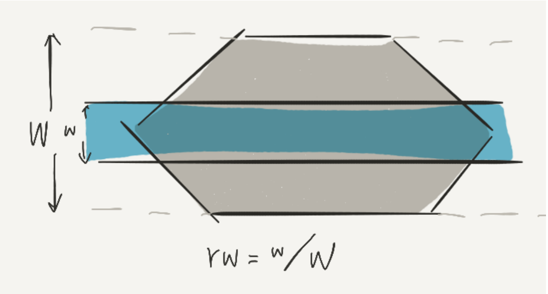
Теорема (Моэзе, 1933; Тарский, 1933)

Если круг покрыт полосками, то их суммарная ширина по крайней мере ~~диаметр~~ ширина круга.

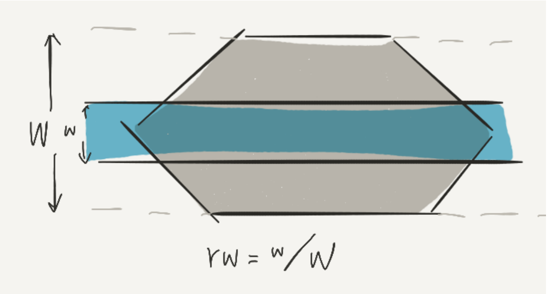
Теорема (Банг, 1950, 1951)

Предыдующая теорема верна для любого выпуклого тела.

Задача Банга о дощечках



Задача Банга о дощечках



Гипотеза (Банг, 1951)

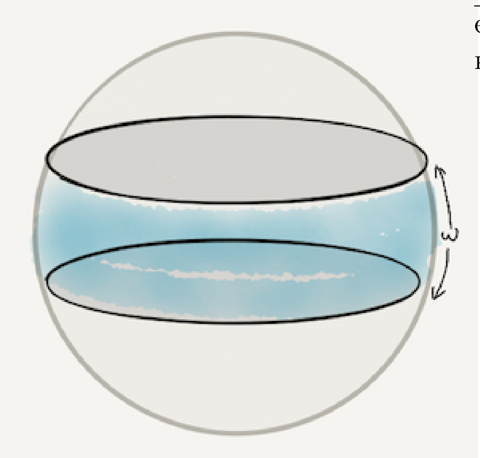
Если выпуклое тело K покрыто полосками, то их суммарная относительная ширина по крайней мере 1.

Теорема (Болл, 1991)

Эта гипотеза верна для любого выпуклого симметричного тела.

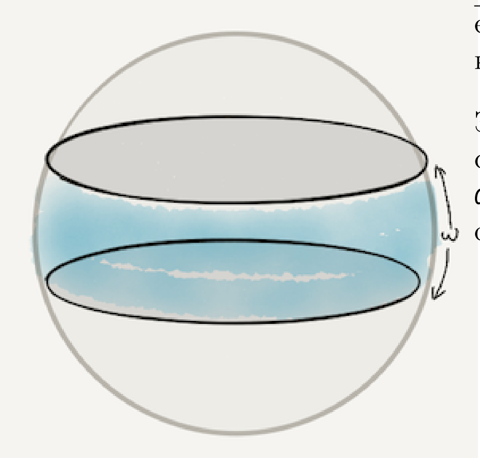
План работы

Зона



Предположение: Сфера S — единичная с центром в начале координат R^3.

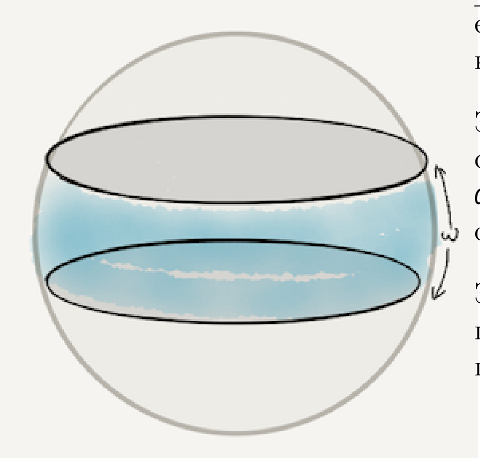
Зона



Предположение: Сфера S — единичная с центром в начале координат R^3.

Зона ширины ω — это часть сферы, лежащая на расстоянии $\omega/2$ от некоторой большой окружности.

Зона

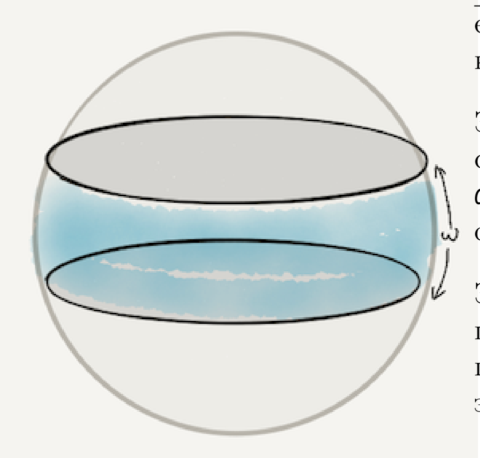


Предположение: Сфера S — единичная с центром в начале координат $\mathbb{R}^3$.

Зона ширины ω — это часть сферы, лежащая на расстоянии $\omega/2$ от некоторой большой окружности.

Зона — это пересечение сферы с центрально-симметричной полоской P.

Зона



Предположение: Сфера S — единичная с центром в начале координат R^3.

Зона ширины ω — это часть сферы, лежащая на расстоянии $\omega/2$ от некоторой большой окружности.

Зона — это пересечение сферы с центрально-симметричной полоской P. Обозначение для зоны: $Z(P)$.

Гипотеза Лазло Фейеш Тота

Гипотеза (Фейеш Тот, 1973)

Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере

Гипотеза Лазло Фейеш Тота

Гипотеза (Фейеш Тот, 1973)

Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере π.

Гипотеза Лазло Фейеш Тота

Гипотеза (Фейеш Тот, 1973)

Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере π.

Частичные результаты:

- Роста, 1972: 3 зоны;
- Линхарт, 1974: 4 зоны;
- Фодор & Вий & Зарнос 2016: если 100 зон одинаковой ширины ω покрывают сферу, то некоторая оценка на ω выполняется.

Теорема (Цзян & АП, 2017;

Гипотеза Лазло Фейеш Тота

Гипотеза (Фейеш Тот, 1973)

Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере π.

Частичные результаты:

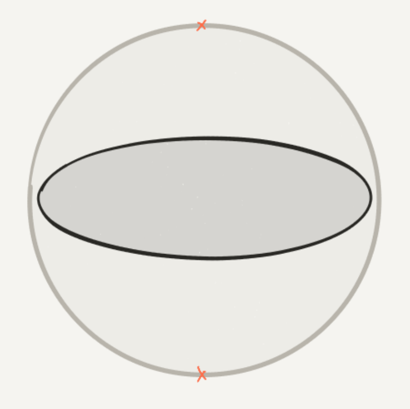
- Роста, 1972: 3 зоны;
- Линхарт, 1974: 4 зоны;
- Фодор & Вий & Зарнос 2016: если 100 зон одинаковой ширины ω покрывают сферу, то некоторая оценка на ω выполняется.

Теорема (Цзян & АП, 2017; Ортега–Морено, 2019: для одинаковых ширин)

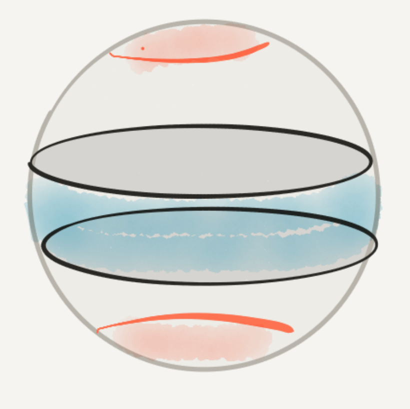
Гипотеза Л.Ф.Тота верна.

План работы

Проективная двойственность

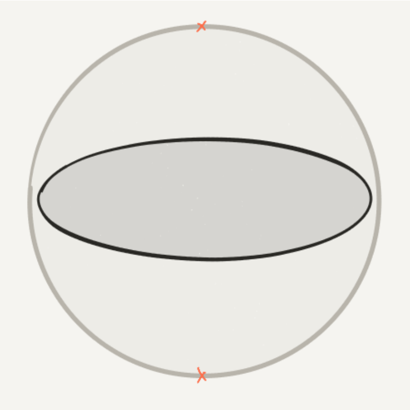


Пара противоположных точек
Большая окружность

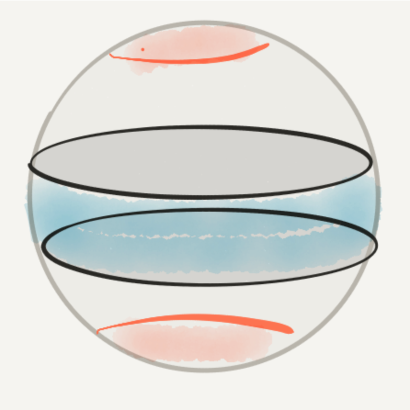


Пара против. шапочек радиуса α
Зона ширины 2α

Проективная двойственность



Пара противоположных точек
Большая окружность



Пара против. шапочек радиуса α
Зона ширины 2α

Пара противоположных точек $\pm\mathbf{x}$ избегает зону тогда и только тогда, когда их двойственная пара шапочек избегает большую окружность, двойственную к $\pm\mathbf{x}$.

Гипотеза двойственная гипотезе Л.Ф.Тота

Гипотеза Л.Ф.Тота

Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере π.

Гипотеза двойственная гипотезе Л.Ф.Тота

Гипотеза Л.Ф.Тота

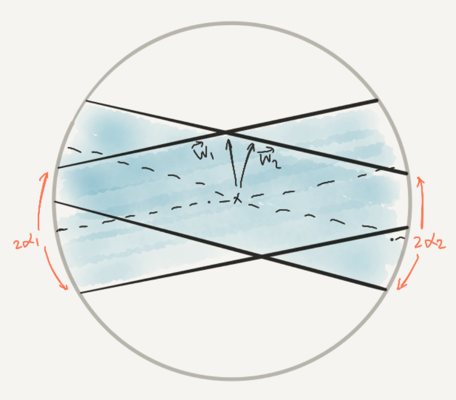
Суммарная ширина зон, покрывающих сферу, по крайней мере π.

Двойственная гипотеза

Если суммарный радиус шапочек не более π, то найдётся большая окружность, которая не пересекает эти шапочки.

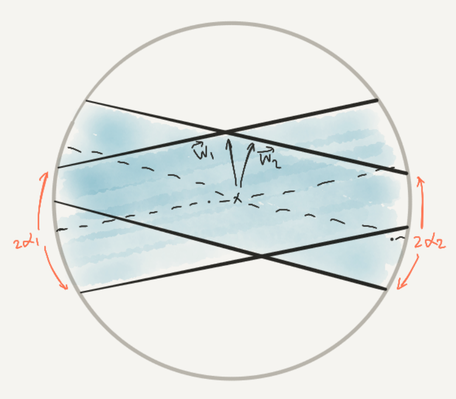
План работы

Доказательство гипотезы Фейеш Тота



Предположение: Пусть ширины зоны $Z_1 = Z(P_1), \dots, Z_n = Z(P_n)$ равны $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < \pi/2$.

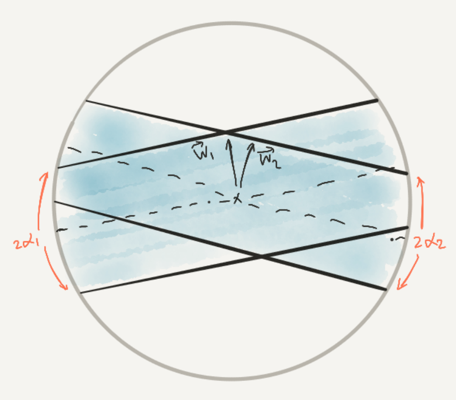
Доказательство гипотезы Фейеш Тота



<u>Предположение:</u> Пусть ширины зоны $Z_1 = Z(P_1), \dots, Z_n = Z(P_n)$ равны $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < \pi/2$.

Покажем, что в таком случае эти зоны не покрывают S.

Доказательство гипотезы Фейеш Тота

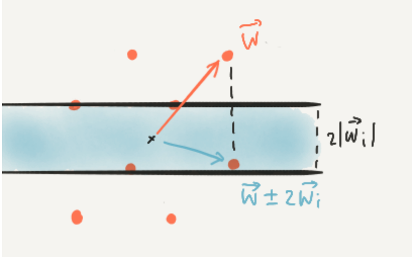


Предположение: Пусть ширины зоны $Z_1 = Z(P_1), \dots, Z_n = Z(P_n)$ равны $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < \pi/2$.

Покажем, что в таком случае эти зоны не покрывают S.

Обозначим через $\mathbf{w}_i$ вектор ортогональный границе P_i длины $\sin \alpha_i$

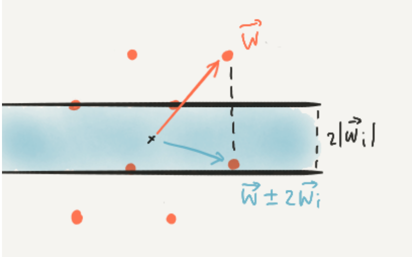
Множество Банга



Рассмотрим множество

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pm \mathbf{w}_i \right\}.$$

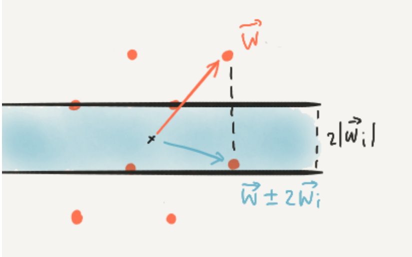
Множество Банга



Рассмотрим множество

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pm \mathbf{w}_i \right\}.$$

Пусть длина $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_n$ наибольшая среди всех векторов L. Тогда $\mathbf{w}$ не лежит ни в одной из полосок P_i!

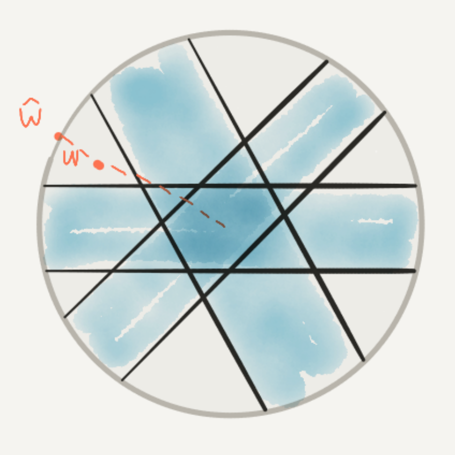


Рассмотрим множество

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pm \mathbf{w}_i \right\}.$$

Пусть длина $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_n$ наибольшая среди всех векторов L. Тогда $\mathbf{w}$ не лежит ни в одной из полосок P_i!

Проекция



Если $|\mathbf{w}| < 1$, то точка $\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ не покрыта ни одной из ~~полосок~~ зон.

Склейка

Если же $|\mathbf{w}| \geq 1 = \sin(\pi/2) > \sin(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$, то мы попробуем совершить слейку нескольких полосок в одну.

Ключевая лемма

Лемма (Цзян & АП, 2017)

Пусть $I \subseteq [n]$ — непустое множество индексов таких, что

$$\left\| \sum_{i \in I} \mathbf{w}_i \right\| \geq \sin\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \tag{1}$$

$$\left\| \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \mathbf{w}_i \right\| \leq \sin\left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} \alpha_i \right) \text{ для любого } j \in I,$$

Êëþ÷åâàÿ ëåììà

Ëåììà (Öçÿí & ÀÏ, 2017)

Ïóñòü I [n] íåïóñòîå ìíîæåñòâî èíäåêñîâ òàêèõ, ÷òî

$$\underset{i2I}{X} \quad w_i \quad \sin\overset{0}{@} \underset{i2I}{X} \quad {}_{i}\overset{1}{A} \qquad (1)$$

$$\underset{i2Infjg}{X} \quad w_i \quad \sin\overset{0}{@} \underset{i2Infjg}{X} \quad {}_{i}\overset{1}{A} \quad \text{äëÿ ëþáîãî} \quad j \; 2 \; I;$$

òîãäà çíàê $Z_i; i \; 2 \; I$, ìîãóò áûòü ïîêðûòû çíîé øèðèíû $\underset{i2I}{P} \; 2 \; {}_{i}$.

Êëþ÷åâàÿ ëåììà

Ëåììà (Öçÿí & ÀÏ, 2017)

Ïóñòü I [n] íåïóñòîå ìíîæåñòâî èíäåêñîâ òàêèõ, ÷òî

$$\underset{i2I}{X} w_i \quad \sin \overset{0}{@} \underset{i2I}{X} \quad {}_{¡}\overset{1}{A} \qquad (1)$$

$$\underset{i2Infjg}{X} w_i \quad \sin \overset{0}{@} \underset{i2Infjg}{X} \quad {}_{¡}\overset{1}{A} \text{ äëÿ ëþáîãî } j \; 2 \; I;$$

òîãäà çîíû Z_i; i 2 I, ìîãóò áûòü ïîêðûòû çîíîé øèðèíû $\underset{i2I}{P}$ 2 ¡.

Íàéäÿì íàèìåíüøåå (ïî âêëþ÷åíèþ) ïîäìíîæåñòâî I [n] óäîâëåòâîðÿþùåå `ñòðîãîìó' (1).

Êëþ÷åâàÿ ëåììà

Ëåììà (Öçÿí & ÀÏ, 2017)

Ïóñòü I [n] íåïóñòîå ìíîæåñòâî èíäåêñîâ òàêèõ, ÷òî

$$\sum_{i2I} w_i \sin@ \sum_{i2I} {}_{¡}A \qquad (1)$$

$$\sum_{i2Inf jg} w_i \sin@ \sum_{i2Inf jg} {}_{¡}A \quad \text{äëÿ ëþáîãî } j \; 2 \; I;$$

òîãäà çíàê Z_i; i 2 I, ìîãóò áûòü ïîêðûòû çíîé øèðèíû P_{i2I} 2 $_{¡}$.

Íàéäåì íàèìåíüøåå (ïî âêëþ÷åíèþ) ïîäìíîæåñòâî I [n]
óäîâëåòâîðÿþùåå \`ñòðîãîìó' (1).

Ñóùåñòâîâàíèå: [n] óäîâëåòâîðÿåò \`ñòðîãîìó' (1).

Ðàçìåð: jIj > 1, ò.ê. jwj = sin $_{¡}$.

Ïëàí äîêàçàòåëüñòâà

Åñëè jwj < 1, òî÷êà w=jwj íå ïîêðûòà.

Åñëè jwj 1, òî ìû ìîæåì ñêëåèòü íåñêîëüêî ïîëîñîê è íå èçìåíèòü ñóììàðíóþ øèðèíó.

Ïëàí ðàáîòû

1 Òåîðåìà Ãóäìàíà Ãóäìàíà î ïîêðûòèè êðóãàìè

2 Èñòîðèÿ

3 Ãèïîòåçà Ëàçëî Ôåéåø Òîòà

4 Ñëàáûé ñôåðè÷åñêèé àíàëîã òåîðåìû Ãóäìàíîâ

5 Äîêàçàòåëüñòâî ãèïîòåçû Ôåéåø Òîòà

6 **Ñôåðè÷åñêàÿ òåîðåìà Ãóäìàíà è Ãóäìàíà**

Òåîðåìà î ïîêðûòèè øàïî÷êàìè

Îïðåäåëåíèå

Áîëüøàÿ îêðóæíîñòü íàçûâàåòñÿ èçáåãàþùåé äëÿ íàáîðà øàïî÷åê, åñëè îíà íå ïåðåñåêàåò (è íå êàñàåòñÿ) øàïî÷åê èç ýòîãî íàáîðà. Êîíå÷íîå ÷èñëî øàïî÷åê íàçûâàåòñÿ íåðàçäåëèìûì, åñëè íå ñóùåñòâóåò èçáåãàþùåé îêðóæíîñòè, êîòîðàÿ áû äåëèëà íàáîð øàïî÷åê íà äâà íåïóñòûõ ìíîæåñòâà.

Òåîðåìà î ïîêðûòèè øàïî÷êàìè

Îïðåäåëåíèå

Áîëüøàÿ îêðóæíîñòü íàçûâàåòñÿ èçáåãàþùåé äëÿ íàáîðà øàïî÷åê, åñëè îíà íå ïåðåñåêàåò (è íå êàñàåòñÿ) øàïî÷åê èç ýòîãî íàáîðà. Êîíå÷íîå ÷èñëî øàïî÷åê íàçûâàåòñÿ íåðàçäåëèìûì, åñëè íå ñóùåñòâóåò èçáåãàþùåé îêðóæíîñòè, êîòîðàÿ áû äåëèëî íàáîð øàïî÷åê íà äâà íåïóñòûõ ìíîæåñòâà.

Òåîðåìà (ÀÏ, 2020+)

Ïóñòü S ýòî íåðàçäåëèìûé íàáîð øàïî÷åê ñôåðè÷åñêîãî ðàäèóñà $_1; : : : ; _n$. Åñëè $_1 + \quad + _n < \; = 2$, òî S ìîæåò áûòü ïîêðûòà îäíîé øàïî÷êîé ðàäèóñà $_1 + \quad + _n$.

Ïîêðûòèå çîí âìåñòî øàïî÷åê

Ýêâèâàëåíòíàÿ òåîðåìà

Ïóñòü $Z_1 = Z(P_1); : : : ; Z_n = Z(P_n)$ S çîíû øèðèíû $2 \ _1; : : : ; 2 \ _n$ ñîîòâåòñòâåííî òàêèå, ÷òî $\ _1 + \ + \ _n < \ = 2$. Åñëè $S \ n \ S_{i=1}^{n} Z_i$ ñîñòîèò èç íå áîëåå ÷åì îäíîãî ìíîæåñòâà ïðîòèâîïîëîæíûõ (àíòèïîäàëüíûõ) ñâÿçàííûõ ñôåðè÷åñêèõ êîìïîíåíò, òî çîíû $Z_1; : : : ; Z_n$ ìîãóò áûòü ïîêðûòû îäíîé çîíîé øèðèíû $2 \ _1 + \ + 2 \ _n$.

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Ïóñòü ñôåðè÷åñêèå øàïî÷êè $D_1; \ldots; D_n$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì îñíîâíîé òåîðåìû.

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Ïóñòü ñôåðè÷åñêèå øàïî÷êè $D_1; : : : ; D_n$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì îñíîâíîé òåîðåìû.
Îáîçíà÷èì ÷åðåç D_i^0 îòêðûòóþ øàïî÷êó, êîíöåíòðè÷íóþ D_i ñôåðè÷åñêîãî ðàäèóñà $= 2$ $_{¡}$.

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâàÿ?

Ïóñòü ñôåðè÷åñêèå øàïî÷êè $D_1; :::; D_n$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì îñíîâíîé òåîðåìû.

Îáîçíà÷èì ÷åðåç D_i^0 îòêðûòóþ øàïî÷êó, êîöåíòðè÷íóþ D_i ñôåðè÷åñêîãî ðàäèóñà $= 2$ $_i$.

Öåíòð îòêðûòîé ïîëóñôåðû ëåæèò â D_i^0, òîãäà è òîëüêî òîãäà êîãäà îíà ïîêðûâàåò D_i.

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Òàê êàê íèêàêàÿ áîëüøàÿ îêðóæíîñòü íå äåëèò $f\,D_1; : : : ; D_n g$ íà äâà íåïóñòûõ ìíîæåñòâà, òî

$$\backslash_{i=1}^{n} \text{"}_{¡} D_i^{0} = \;;\; \text{ åñëè íå âñå "}_{¡}\ 2\ f\quad 1g\ \text{îäèíàêîâûå}\ :$$

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Çíà÷èò çîíû $S n (D_1^0 [(D_1^0)), \dots, S n (D_n^0 [(D_n^0))$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû.

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Çíà÷èò çîíû $S n (D_1^0 [(D_1^0)) ,\ldots, S n (D_n^0 [(D_n^0))$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû.

Ñëåäîâàòåëüíî, îíè ìîãóò áûòü ïîêðûòû îäíîé çîíîé øèðèíû $2 \ _1 + \quad + 2 \ _n$. Òàê êàê $S n Z$ ýòî îáúåäèíåíèå äâóõ îòêðûòûõ øàïî÷åê D^0 è D^0 ðàäèóñà $= 2 \quad (\ _1 + \quad + \ _n)$, òî áåç îãðàíè÷åíèÿ îáùíîñòè ïîëó÷àåì

$$D^0 \quad \bigcap_{i=1}^{n} D_i^0 \quad :$$

Ïî÷åìó èç ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû ñëåäóåò îñíîâíàÿ?

Çíà÷èò çîíû $S_n(D_1^0 [(D_1^0)), \ldots, S_n(D_n^0 [(D_n^0))$ óäîâëåòâîðÿþò óñëîâèÿì ýêâèâàëåíòíîé òåîðåìû.
Ñëåäîâàòåëüíî, îíè ìîãóò áûòü ïîêðûòû îäíîé çîíîé øèðèíû $2 _1 + \quad + 2 _n$. Òàê êàê $S_n Z$ ýòî îáúåäèíåíèå äâóõ îòêðûòûõ øàïî÷åê D^0 è D^0 ðàäèóñà $= 2 \quad (_1 + \quad + _n)$, òî áåç îãðàíè÷åíèÿ îáùíîñòè ïîëó÷àåì

$$D^0 \quad \bigcap_{i=1}^{n} D_i^0 \quad :$$

(Ïîëüçóÿñü ïðîåêòèâíîé äóàëüíîñòüþ, ïîëó÷àåì, ÷òî) D^0 ðàäèóñà $_1 + \quad + _n$ ïîêðûâàåò øàïî÷êè $D_1; : : : ; D_n$.

Ìíîæåñòâî Áàíãà

Ðàññìîòðèì ìíîæåñòâî

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) :$$

Ìíîæåñòâî Áàíãà

Ðàññìîòðèì ìíîæåñòâî

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} \qquad w_i \quad : \right)$$

- Ïóñòü ó âåêòîðà $w = w_1 + \qquad + w_n$ íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè âåêòîðîâ L.

Ìíîæåñòâî Áàíãà

Ðàññìîòðèì ìíîæåñòâî

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} \qquad w_i \qquad \right) :$$

- Ïóñòü ó âåêòîðà $w = w_1 + \quad + w_n$ íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè âåêòîðîâ L.
- Åñëè $|w| > \sin(\ _1 + \quad + \ _n)$, òû ìû ìîæåì ñëåèòü íåñêîëüêî çîí, èñïîëüçóÿ îñíîâíóþ ëåììó.

Ìíîæåñòâî Áàíãà

Ðàññìîòðèì ìíîæåñòâî

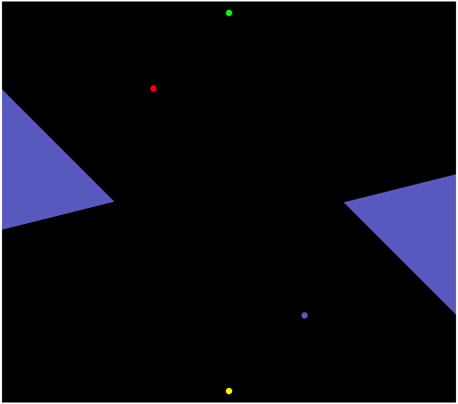
$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \quad w_i \quad : \quad \right\}$$

- Ïóñòü ó âåêòîðà $w = w_1 + \quad + w_n$ íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè âåêòîðîâ L.
- Åñëè $jwj > \sin(\ _1 + \quad + \ _n)$, òû ìû ìîæåì ñëåèòü íåñêîëüêî çîí, èñïîëüçóÿ îñíîâíóþ ëåììó.
- Ïîýòîìó áåç îãðàíè÷åíèÿ îáùíîñòè ìîæíî ñ÷èòàòü $jwj \quad \sin(\ _1 + \quad + \ _n)$.

Äèàãðàììà Âîðîíîãî äëÿ ìíîæåñòâà Áàíãà

Äëÿ òî÷êè $x\ 2\ L$ îáîçíà÷èì ÷åðåç A_x ñëåäóþùåå ìíîæåñòâî

$$A_x = \overset{n}{}\ y\ 2\ R^3 : jx \quad yj \quad j\ x^0 \quad yj\ \text{äëÿ âñåõ}x^0\,2\ L \overset{o}{}\ :$$

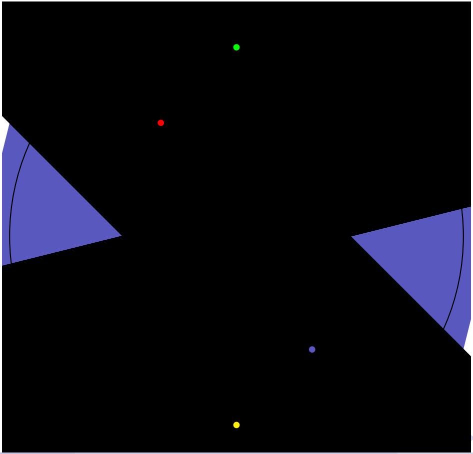


Ìíîæåñòâî T

Ðàññìîòðèì

$$T = \Big\{ t \ 2 \ R^3 : t \quad x \ 2 \ B \ \text{äëÿ âñåõ} \ x \ 2 \ L \Big\} = \bigcap_{x2L} (B \quad x);$$

ãäå B îòêðûòûé åäèíè÷íûé øàð, îãðàíè÷åííûé S.

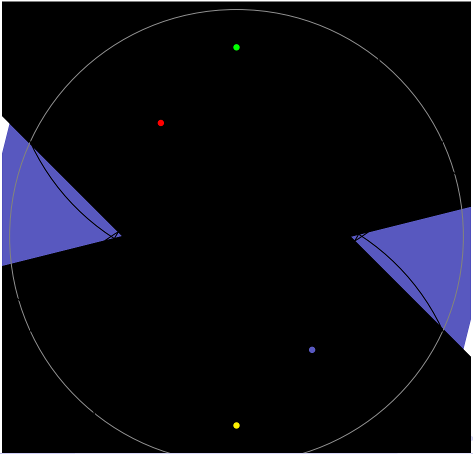


Ìíîæåñòâî T

Ðàññìîòðèì

$$T = \left\{ t \in \mathbb{R}^3 : t \quad x \in B \text{ äëÿ âñåõ } x \in L \right\} = \bigcap_{x \in L} (B \quad x);$$

ãäå B îòêðûòûé åäèíè÷íûé øàð, îãðàíè÷åííûé S.

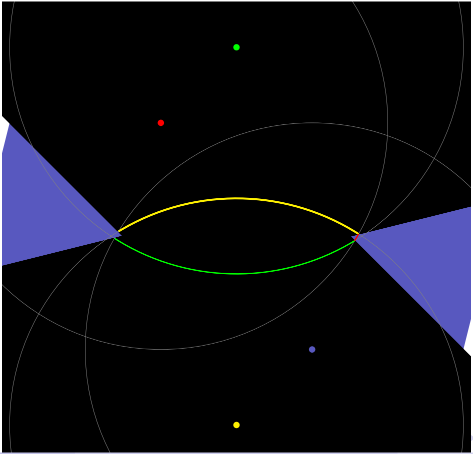


Ìíîæåñòâî T

Ðàññìîòðèì

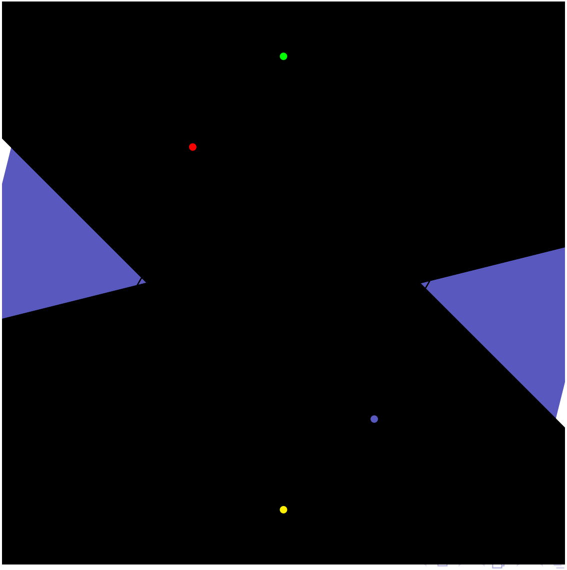
$$T = \left\{ t\ 2\ R^3 : t \quad x\ 2\ B \text{ for all } x\ 2\ L \right\} = \setminus_{x2L} (B \quad x);$$

ãäå B îòêðûòûé åäèíè÷íûé øàð, îãðàíè÷åííûé S.



Ìíîæåñòâà T_x

Îáîçíà÷èì ÷åðåç T_x ìíîæåñòâà $A_x \setminus T$.



Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó x 2 L.

t 2 T_x T =) t x 2 B.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó x 2 L.

- t 2 T_x T =) t x 2 B.
- t 2 T_x A_x =) ó âåêòîðà t x íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè t x^0 ñðåäè x^0 2 L

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó $x \; 2 \; L$.

- $t \; 2 \; T_x \quad T \; =) \quad t \quad x \; 2 \; B$.
- $t \; 2 \; T_x \quad A_x \; =)$ ó âåêòîðà $t \quad x$ íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè $t \quad x^0$ ñðåäè $x^0 \, 2 \; L \; =) \quad t \quad x \; 2 \; R^3 \, n \, [\, {}^{n}_{i=1} \, P_i$.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó x 2 L.

- t 2 T_x T =) t x 2 B.
- t 2 T_x A_x =) ó âåêòîðà t x íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè t x^0 ñðåäè x^0 2 L =) t x 2 R^3 n [$^n_{i=1}$ P_i. Áîëåå òîãî, x = P $^n_{i=1}$ "$_i w_i$, òî

  t x 2 P_x = \ $^n_{i=1}$ f y 2 R^3 : hy; "$_i w_i$i h w_i; $w_i$ig:

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó x 2 L.

- t 2 T_x T =) t x 2 B.
- t 2 T_x A_x =) ó âåêòîðà t x íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè t x^0 ñðåäè x^0 2 L =) t x 2 R^3 n [$^n_{i=1}$ P_i. Áîëåå òîãî, x = P $^n_{i=1}$ "$_i$ w_i, òî

$$t \quad x\ 2\ P_x = \backslash\ ^n_{i=1}\ f\ y\ 2\ R^3 : hy;\ "_i w_i i\ \ h\ w_i ; w_i ig:$$

=) Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ t x íà S òàêæå ïðèíàäëåæèò P_x.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Ðàññìîòðèì ëþáóþ òî÷êó x 2 L.

- t 2 T_x T =) t x 2 B.
- t 2 T_x A_x =) ó âåêòîðà t x íàèáîëüøàÿ äëèíà ñðåäè t x^0 ñðåäè x^0 2 L =) t x 2 R^3 n [$_{i=1}^{n}$ P_i. Áîëåå òîãî, x = P $_{i=1}^{n}$ "$_i w_i$, òî

  t x 2 P_x = \ $_{i=1}^{n}$ f y 2 R^3 : hy; "$_i w_i$ i h w_i ; w_i ig:

- =) Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ t x íà S òàêæå ïðèíàäëåæèò P_x.
- Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è S n [$_{i=1}^{n}$ Z_i).

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è $S \; n \; [\,_{i=1}^{n} Z_i$).

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è $S \; n \; [^{n}_{i=1} Z_i$).

Ìíîæåñòâà P_x äëÿ x 2 L ñòðîãî ðàçäåëåíû.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è S n [$^{n}_{i=1}$ Z_i).

Ìíîæåòñâà P_x äëÿ x 2 L ñòðîãî ðàçäåëåíû.

Ìíîæåñòâà T $_w$ íåïóñòû.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è $S \, n \, [^{n}_{i=1} Z_i$).

Ìíîæåñòâà P_x äëÿ x 2 L ñòðîãî ðàçäåëåíû.

Ìíîæåñòâà T_w íåïóñòû.

Ò.ê. åñòü âñåãî äâå êîìïîíåíòû ñâÿçíîñòè ó ìíîæåñòâà $S \, n \, [^{n}_{i=1} Z_i$, òî âñå îñòàëüíûå ìíîæåñòâà T_x äëÿ x 2 L n f wg ïóñòûå.

Êîíåö äîêàçàòåëüñòâà

Öåíòðàëüíàÿ ïðîåêöèÿ T_x x íà S ïðèíàäëåæèò P_x (è S n [$^n_{i=1} Z_i$).

Ìíîæåòñâà P_x äëÿ x 2 L ñòðîãî ðàçäåëåíû.

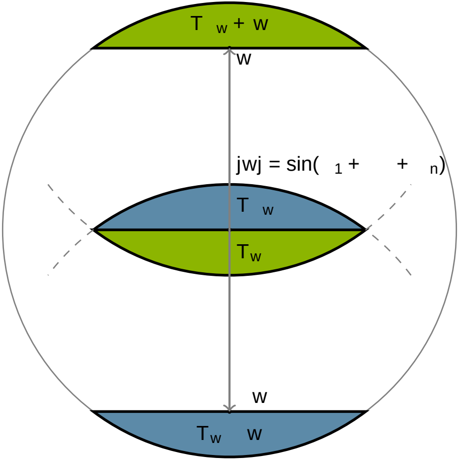
Ìíîæåñòâà T $_w$ íåïóñòû.

Ò.ê. åñòü âñåãî äâå êîìïîíåíòû ñâÿçíîñòè ó ìíîæåòñâà S n [$^n_{i=1} Z_i$, òî âñå îñòàëüíûå ìíîæåñòâà T_x äëÿ x 2 L n f wg ïóñòûå.

=) T ïåðåñå÷åíèå âñåãî äâóõ øàðîâ, òî åñòü

$$T = (B \quad w) \backslash (B + w):$$

Ïîñëåäíÿÿ êàðòèíêà




Дорогая, это тебе!
О боже мой! Это то, о чем я думаю?!
Да-да. Доказательство гипотезы Ласло Фейеш Тота!
Ты у меня лучший!