О неразделимых кругах и шапочках

Александр Полянский[1]

1. Задачи после первой лекции

1.1*. Пусть $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ — вневписанные круги треугольника ABC радиусов r_a, r_b, r_c с центрами. Найдите ещё какую-то 'особую' точку, которая могла бы послужить центром круга радиуса $r_a + r_b + r_c$, покрывающего $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, радиуса r_a, r_b, r_c. (Одну такую точку мы нашли, доказывая теорему Гудманов. Нужно определить явное расположение точки относительно треугольника.)

1.2. (1 балл) Пусть отрезки $B_{r_1}(\mathbf{a}_1)$ и $B_{r_2}(\mathbf{a}_2)$ пересекаются. Докажите, что тогда их покрывает отрезок $B_{r_1+r_2}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2}{r_1+r_2}$.

1.3. (1 балл) Пусть отрезки $B_{r_1}(\mathbf{a}_1), \ldots, B_{r_n}(\mathbf{a}_n)$ образуют неразделимый набор отрезков на прямой. Докажите, что отрезок $B_{r_1+\cdots+r_n}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1+\cdots+r_n\mathbf{a}_n}{r_1+\cdots+r_n}$ будет покрывать этот набор отрезков.

1.4. (1 балл) Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — положительные числа, а $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \ldots, \mathbf{a}_n = (x_n, y_n)$ — точки на плоскости (рассматриваем как векторы). Обозначим через $\mathbf{a}$ точку $\frac{r_1\mathbf{a}_1+\ldots r_n\mathbf{a}_n}{r_1+\cdots+r_n}$, а через ℓ — произвольную прямую, проходящую через $\mathbf{a}$. Пусть $\mathbf{a}'_i$ — проекция точки $\mathbf{a}_i$ на прямую ℓ. Докажите, что $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}'_1+\cdots+r_n\mathbf{a}'_n}{r_1+\cdots+r_n}$.

Нам понадобится следующее определение. Пусть K — выпуклый многоугольник. Гомотетом $K_\lambda(\mathbf{t})$ с коэффициентом $\lambda > 0$ называется $\mathbf{t} + \lambda K$, где $\mathbf{t}$ — произвольный вектор сдвига (на плоскости).

1.5. (2 балл) Докажите теорему Гудманов в следующей формулировке.

Пусть $K_{\lambda_1}(\mathbf{t}_1), \ldots, K_{\lambda_n}(\mathbf{t}_n)$ — гомотеты симметричного выпуклого многоугольника K, образующие неделимый набор (то есть не существует прямой не пересекающей гомотеты и разделяющей множество гомотетов на два непустых множества). Тогда существует гомотет, покрывающий данные гомотеты, с коэффициентом $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

1.6. (3 балла) Докажите теорему Гудманов в следующей формулировке.

Пусть $\Delta_{\lambda_1}(\mathbf{t}_1), \ldots, \Delta_{\lambda_n}(\mathbf{t}_n)$ — гомотеты треугольника Δ, образующие неделимый набор (то есть не существует прямой не пересекающей гомотеты и разделяющей множество гомотетов на два непустых множества). Тогда существует гомотет, покрывающий данные гомотеты, с коэффициентом $\frac{3}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

1.7*. Улучшите коэффициент $\frac{3}{2}$ в предыдущей задаче.

1.8. (2 балла) Докажите следующее утверждение.

Пусть дан набор отрезков $B_{r_1}(\mathbf{a}_1), \ldots, B_{r_n}(\mathbf{a}_n)$ на прямой таких, что любая точка прямой лежит в не более чем k отрезках. Тогда отрезок $B_{\frac{1}{k}(r_1+\cdots+r_n)}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = \frac{r_1\mathbf{a}_1+\cdots+r_n\mathbf{a}_n}{r_1+\cdots+r_n}$, будет лежать в минимальном отрезке, содержащем все $B_{r_i}(\mathbf{a}_i)$.

Для зачёта за первое занятие нужно решить либо одну задачу со звёздочкой, либо набрать ≥ 6 баллов. Решения задач со звёздочкой отправлять в письменном виде на почту alexander.polyanskii@yandex.ru.

Можно почитать статью в Кванте Смуров и Спивак "Покрытие полосками", 1998, №4, стр. 17–22, №5, стр. 6–11. http://kvant.mccme.ru/au/smurov_m.htm

[1]email: alexander.polyanskii@yandex.ru; homepage: http://polyanskii.com/

2. Задачи после второй лекции

2.9. (1 балл) Пусть $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ некоторые векторы. Пусть вектор $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_n$ имеет наибольшую длину среди векторов $\{\sum_{i=1}^n \pm \mathbf{w}_i\}$. Докажите, что

$$\mathbf{w} \in \cap_{i=1}^n \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \geq \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle\}.$$

2.10. (2 балла) *Центроидом* четырехугольника будем называть точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противоположх сторон. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность ω с центром O. Известно, что $AB = DE$ и $BC = EF$. Пусть X, Y и Z — центроиды четырёхугольников $ABDE, BCEF$ и $CDFA$ соответственно . Докажите, что высоты треугольника XYZ пересекаются в точке O.

2.11*. Докажите ключевую лемму. (Может быть, будет удобнее доказывать эту лемму в формулировке для шапочек.)

Пусть $I \subseteq [n]$ — непустое множество индексов таких, что

$$\left|\sum_{i\in I} \mathbf{w}_i\right| \geq \sin\left(\sum_{i\in I} \alpha_i\right),$$

$$\left|\sum_{i\in I\setminus\{j\}} \mathbf{w}_i\right| \leq \sin\left(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} \alpha_i\right) \text{ для любого } j \in I,$$

тогда зоны Z_i, $i \in I$, могут быть покрыты зоной ширины $\sum_{i\in I} 2\alpha_i$.

2.12. (1 балл) Докажите ключевую лемму для 2 зон.

Для зачёта за второе занятие нужно решить либо одну задачу со звёздочкой, либо набрать ≥ 3 баллов. Решение задачи со звёздочкой отправлять на почту alexander.polyanskii@yandex.ru.