

1. Доказать, что  $0 \times a = 0$  (для колец).
2. Доказать, что если  $0 = 1$ , то любой  $a = 0 = 1$  (для колец).
3. Привести пример кольца и многочленов  $f$  и  $g$ , не являющихся константами для него, таких, что  $f(x) \cdot g(x) = x - a$ .
4. Вывести из леммы Евклида (если  $ab$  делится на простое  $p$ , то хотя бы одно из  $a, b$  делится на  $p$ ) основную теорему арифметики (любое число можно представить в виде произведения простых единственным образом с точностью до перестановки множителей).
5. Почему для колец неверна формула  $f(x) = (x - a) \cdot \dots \cdot (x - b) \cdot h(x)$ , где  $a, \dots, b$  - различные корни  $f(x)$ ?
6. Доказать, что  $(\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z})$  - поле.

1. Доказать, что  $\mathbb{Z}[i]$  - кольцо.
2. Доказать, что умножение некоторого числа на  $i$  - это поворот соответствующего вектора на  $90$  градусов против часовой стрелки.
3. Доказать, что множество гауссовых целых чисел, делящихся на  $(v + wi)$  - это квадратная сетка.
4. Найти площадь одного квадрата сетки из задачи 3.
5. ТВА
6. Доказать, что любое число из  $(\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z})$  представимо в виде  $a + bi$ , где  $a, b$  принадлежат  $\{0, 1, -1\}$ .
7. Доказать, что  $(\mathbb{Z}[i]/(2 + i)\mathbb{Z}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
8. Вывести из того, что  $p^m - 1$  делится на  $S_a$ , малую теорему Ферма.
9. Доказать, что если  $Ord(g)$  взаимно просто с  $Ord(h)$ , то  $Ord(gh) = Ord(g) \cdot Ord(h)$