Спектральная теория графов. Задачи, актуальные на момент 19.08.2020

Не все приведённые задачи имеют отношение к тому, что уже обсуждалось, тем не менее, возможно вам будет интересно задуматься над какими-то задачами до того, как их обсудят на лекции.

В скобках у каждой задачи указано, сколько она стоит баллов, и до какой лекции её можно будет сдавать, если подобное ограничение существует.

Из первых 7 задач будут зачтены только 3 с наибольшим баллом.

1 (2 балла). Напишите матрицу, соответствующую повороту на 60° по часовой стрелке в стандартном базисе (то есть в том, в котором базисные вектора имеют длину 1 и второй вектор получается из первого поворотом на 90 градусов по часовой стрелке). Найдите какой-нибудь базис, в котором матрица этого отображения будет другой.

2(1 балл). Приведите пример двух матриц A и B, для которых $AB \neq BA$.

3(до *третьей* лекции, 2 балла). Найдите все матрицы A размера 2×2, что для любой матрицы B выполнено $AB = BA$.

4(2 балла). Докажите с помощью формул умножения матриц, что умножение матриц ассоциативно, то есть для любых матриц A размера $n \times k$, B размера $k \times l$ и C размера $l \times m$ выполнено равенство $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

5(до *четвёртой* лекции, 3 балла). Рассмотрим отображение f, которое в каком-то базисе записывается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите все векторы v, для которых $f(v)$ и v коллинеарны.

6(1 балл). A — матрица смежности графа G. Докажите, что $(A^k)_{ij}$ - количество маршрутов длины k в графе G, начинающихся в вершине с номером i и заканчивающихся в вершине с номером j.

7(1 балл). Докажите, что множество строк действительных чисел (a, b, c, d, e, f), для которых $3a-b-c = 0$, $2b-5c+e = 0$, $c+d+f = 0$, является линейным пространством над полем действительных чисел.

8(2 балла, до *четвёртой* **лекции).** В графе степень каждой вершины 3, между любыми двумя вершинами есть путь длины не более 2. Какое наибольшее количество вершин может быть в таком графе?

9(5 баллов, до четвёртой лекции). В графе степень каждой вершины равна 7, у любых двух смежных нет общих соседей, а у любых двух несмежных есть ровно один общий сосед.
а) (1 из 5 баллов) Сколько вершин в таком графе?
б) Докажите, что такой граф существует.

10(3 балла). Дано $n+2$ подмножества n-элементного множества. Докажите, что из них можно выбрать два непересекающихся семейства подмножеств, у которых совпадают объединения и пересечения.

11(2 балла). Найдите какой-нибудь базис пространства из задачи 7.

12(3 балла, до четвёртой лекции). В точках с целыми координатами в пространстве расположен куб. Докажите, что его ребро целое.