Спектральная теория графов. Что было на второе лекции?

Исправление ключевой опечатки из конспекта первой лекции.

Слушатели лекции должны были обратить внимание на несоответствие определения умножения матриц, которое я сказал на лекции и которое записал в конспекте. Приведу правильное определение.

> **Определение.** Произведение матрицы A размера $n \times k$ и матрицы B размера $k \times l$ — это матрица размера $n \times l$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит “скалярное произведение” i-той строки матрицы A и j-того **столбца** матрицы B.

Общее определение линейного или векторного пространства.

Определение. Пусть даны: 1) Множество V элементов произвольной природы, называемых *векторами*;
2) Поле F, называемое в дальнейшем *полем скаляров*;
3) Операция сложения на множестве V, сопоставляющая паре элементов $u, v \in V$ элемент $u + v \in V$;
4) Операция умножения элемента множества V на скаляр, сопоставляющая паре элементов (λ, v), где $\lambda \in F$, $v \in V$ элемент $\lambda v \in V$.

При этом выполнены следующие свойства *(аксиомы векторного пространства)*:

- $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$;
- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
- для любого $x \in V$ существует $y \in V$ такой, что $x + y = 0$;
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in F$ и $x \in V$;
- $1 \cdot x = x$ для единицы из поля F и любого $x \in V$;
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in F$, $x \in V$;
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $\alpha \in F$, $x, y \in V$.

В целях нашего курса поле скаляров почти всегда будет полем действительных чисел, но сегодня будет один пример над полем остатков по модулю 2.

Самый естественный пример линейных пространств — это строчки или столбцы действительных чисел, которые складываются поэлементно.

Линейные комбинации и базис.

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, v_2, \ldots v_k$ называется произвольная сумма вида $c_1v_1 + c_2v_2 + +c_kv_k$, где $c_1, c_2, \ldots c_k$ — произвольные числа (элементы поля).

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все c_i равны нулю и *нетривиальной* в противном случае.

Определение. Набор векторов $v_1, v_2, \ldots v_k$ называется *линейно зависимым*, если некоторая его нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору, и *линейно независимым* в противном случае.

Следует отметить, что набор линейно зависимый тогда и только тогда, когда один из векторов набора выражается через остальные (то есть равен их линейной комбинации). Однако неверно, что любой вектор из линейно зависимого набора выражается через остальные!

Определение. Набор векторов $v_1, v_2, \ldots v_n$ является *порождающим*, если любой другой вектор выражается через векторы этого набора.

Определение. Набор векторов называется *базисом*, если он линейно независимый и порождающий.

У любого пространства довольно много базисов. Например в пространстве столбцов высоты n самый простой и естественный базис – это набор столбцов с одной единичкой и остальными нулями, но далеко не единственный. Тем не менее все базисы одного и того же пространства содержат одно и то же число векторов. Сейчас мы это докажем.

Основная лемма о линейной зависимости. Даны натуральные числа $k > n$ и набор векторов $e_1, e_2 \dots e_n$. Через них выражены векторы набора $v_1, v_2 \dots v_k$. Тогда этот набор линейно зависим.

Доказательство. Будем пытаться искать такие $x_1, x_2, \dots x_k$, что $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k = 0$. Мы знаем, что v_i выражаются через $e_1, e_2, \dots e_n$.

Обозначим коэффициенты, через которые выражается каждый v_i.

$$v_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots a_{ni}e_n.$$

Тогда в равенстве $x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_kv_k = 0$ выразим каждый v_i через e-шки, а потом сгруппируем слагаемые с каждым e_j.

Равенство примет вид

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots a_{1k}x_k)e_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots a_{2k}x_k)e_2+\ldots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots$$

Чтобы оно было верным достаточно, чтобы были выполнены уравнения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots a_{1k}x_k = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots a_{2k}x_k = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots a_{nk}x_k = 0 \end{cases},$$

Это система *однородных* (правые части равны 0) линейных уравнений, при этом уравнений меньше, чем переменных. Докажем, что у этой системы есть решение, в котором не все x_i равны 0.

Теорема. Если в системе однородных линейных уравнений переменных больше, чем уравнений, то у неё есть решение, в котором не все x_i равны 0.

План доказательства. Будем вести индукцию по числу уравнений.

База: одно или ноль уравнений. Если есть одно уравнение, то переменных хотя бы две, перед одной из них ненулевой коэффициент, тогда другую переменную можно сделать любой ненулевой.

Переход $1, 2, \dots n-1 \to n$. Можно найти какое-то уравнение, в котором есть переменная с ненулевым коэффициентом при ней, выразить эту переменную из неё. Тем самым мы избавимся от одной переменной и хотя бы от одного уравнения. Поэтому можно будет применить предположение индукции.

Несколько применений основной леммы о линейной зависимости.

Задача 1. В олимпиаде участвовало k человек. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. Докажите, что $k \leqslant n$.

Решение. Предположим, что $k > n$. Сопоставим каждому участнику n-мерный вектор v_j, в котором на i-том месте стоит 1, если участник решил i-тую задачу и нолик иначе. Так как векторов больше, чем n, то они линейно зависимые. Запишем линейную комбинацию, которая равна нулю.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots c_\ell v_= 0.$$

Здесь все c_i не равны нулю, то есть вообще говоря необязательно $k = \ell$.

Перенесём в правую часть слагаемые, при которых сейчас коэффициент отрицательный. Можно считать, что это несколько последних слагаемых.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_tv_t = c_{t+1}v_{t+1} + \dots + c_\ell v_\ell.$$

Заметим, что при любом назначении баллов за задачу, если p_i — количество баллов i-того участника, то

$$c_1p_1 + c_2p_2 + \dots + c_tp_t = c_{t+1}p_{t+1} + \dots + c_\ell p_\ell.$$

Без ограничения общности можно считать, что сумма коэффициентов слева меньше или равна, чем справа. Тогда невозможен такой порядок участников, при котором все участники из левой части набрали меньше баллов, чем все участники справа.

Задача 2. В университете проводится n лекций, их посещают k студентов. Каждый студент посетил нечётное число лекций, а любые два студента вместе побывали на чётном числе лекций. Докажите, что $n \geqslant k$.

Решение. А здесь каждому студенту сопоставим n-мерный вектор, координаты которого — остатки по модулю 2. Будем ставить 1, если студент посетил лекцию, и нолик — иначе. Если $k > n$,то эти векторы линейно зависимы. Но линейно зависимы в ситуации, когда рассматриваем пространство над полем остатков по модулю 2, означает, что сумма некоторых векторов равна нулю.

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_t = 0.$$

Посмотрим на места, где у v_1 стоят единички. Этих мест нечётное количество. У остальных векторов на этих местах чётное число единиц. Поэтму суммарно у всех векторов $v_1, v_2 \ldots v_t$ в этих местах нечётное число единиц, значит в одном из мест нечётное число единиц. Но тогда сумма не равна нулевому вектору. Противоречие.