Спектральная теория графов. Что было на первой лекции?

Линейные отображение в двумерном пространстве.

Множество векторов на плоскости будем обозначать $\mathbb{R}^2$.

Определение. Отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется линейным, если для любых $u, v \in \mathbb{R}^2$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнены равенства:
1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Два условия иногда для восприятия бывает лучше заменять одним: для любых $u, v \in \mathbb{R}^2$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Чтобы уметь быстро понимать, куда переходит каждый вектор при линейном отображении достаточно понять, куда переходят базисные векторы. И это принято относительно единообразно записывать. Для того, чтобы как-то коротко "закодировать" линейное отображение f, нужно выбрать базис e_1 и e_2 и узнать, какие координаты в этом базисе имеют векторы $f(e_1)$ и $f(e_2)$.

Будем обозначать $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ вектор, равный $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$, то есть в выбранном нами базисе он имеет указанные координаты.

Тогда если $f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, то $f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$.

И вот здесь появляется *матрица линейного отображения* f *в базисе* (e_1, e_2).

Определение. Матрица линейного отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – это таблица чисел с двумя строками и двумя столбцами, в первом столбце пишутся координаты вектора $f(e_1)$, во втором столбце пишут координаты вектора $f(e_2)$.

В обозначениях, введённых выше, получим

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \; f(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \; M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

В два шага поймём, как же умножать матрицы, и почему.

Вместо того, чтобы писать $f\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$,

Раз уж мы закодировали f матрицей, то можно и запись $f\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$ заменить на $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Это, как мы помним, равно $\begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$. Между прочим мы только что определили, как умножать матрицу на вектор.

Определение. Произведение матрицы 2×2 на двумерный вектор-столбец – это двумерный вектор-столбец на i-той координате которого стоит “скалярное произведение” i-той строчки матрицы и столбца координат вектора.

В формульном виде $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + qb \\ ru + sv \end{pmatrix}$.

Замечание. То, что скалярное произведение внесено здесь в кавычки, несёт глубокий смысл. В линейной алгебре скалярное произведение определяется несколько иначе и шире чем просто сумма произведений соответствующих координат. Надеюсь, к тому моменту, когда вы с этим столкнётесь, вы будете умножат матрицы на автомате и противоречий в голове не появится.

Как можно заметить, произведение матрицы на столбец — это образ этого самого столбца при линейном отображении. Тогда логично определить произведение матриц матрицей, соответствующей композиции соответствующим линейным отображениям.

Представим, что у нас есть линейные отображения f и g, который в базисе (e_1, e_2) записываются матрицами $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ соответственно. Тогда попробуем записать матрицу отображения $f \circ g$ — композиции отображений f и g. Как мы помним, нужно узнать куда перейдут базисные вектора e_1 и e_2, если к ним применить $f \circ g$, а потом записать это в столбцы. Получается, что первый столбец произведения матриц A и B равен $A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$, а второй столбец равен $A \cdot \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$. Таким образом можно сформулировать следующее правило произведения матриц.

Определение. Произведение двух матриц размера 2×2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ — это матрица размера 2×2, у которой на пересечении i-той строчки и j-того столбца стоит "скалярное произведение" i-той строчки матрицы A и j-той строчки матрицы B.

В виде формулы можно записать следующим образом $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

Замечание. Вообще говоря, при умножении матриц порядок множителей важен, собственно как и при композиции отображений.

Аналогичным образом можно определить и произведение матриц больших размеров.

Определение. Произведение матрицы A размера $n \times k$ и матрицы B размера $k \times l$ — это матрица размера $n \times l$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит "скалярное произведение" i-той строки матрицы A и j-той строки матрицы B.

Замечание. Произведение матрицы на вектор — это тоже произведение двух матриц: размера $2\ times 2$ и 2×1.

Несложно связать матрицы бОльших размеров с линейными отображениями, а затем и показать, что произведение матриц соответствует композиции линейных отображений, но сделаем мы это в следующий раз.

Числа Фибоначчи

Думаю, вы прекрасно знаете, что числа Фибоначчи — это последовательность, заданная рекуррентно $F_1 = F_2 = 1$, и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 3$.

Рассмотрим линейное отображение, заданное в каком-то базисе матрицей $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Несложно убедиться, что $F \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Поэтому $F^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Тогда, чтобы найти большие номера последовательности Фибоначчи, достаточно найти соответствующую степень матрицы F. Возводить быстро в степень мы умеем. Формула Бине для чисел Фибоначчи тоже позволяет свести проблему поиска числа Фибоначчи к возведению в степень, но придётся возводить иррациональные числа, что создаст дополнительные сложности.

Матрица смежности графа.

Более близкий к целям нашего курса пример — это матрица смежности графа.

Определение. *Матрицей смежности* графа G (без петель и кратных ребер), вершины которого пронумерованы числами от 1 до n называется матрица A размера $n \times n$, такая что $A_{ij} = 1$, если i и j соединены ребром, и $A_{ij} = 0$ в противном случае.

Интересное наблюдение в том, что квадрат матрицы смежности — это матрица, в которой на пересечении i-той строчки и j-того столбца стоит количество общих соседей вершин i и j, если $i \neq j$ и степень вершины i, если $i = j$.

Общее определение линейного или векторного пространства.

Определение. Пусть даны: 1) Множество V элементов произвольной природы, называемых *векторами*;
2) Поле F, называемое в дальнейшем *полем скаляров*;
3) Операция сложения на множестве V, сопоставляющая паре элементов $u, v \in V$ элемент $u + v \in V$;
4) Операция умножения элемента множества V на скаляр, сопоставляющая паре элементов (λ, v), где $\lambda \in F$, $v \in V$ элемент $\lambda v \in V$.

При этом выполнены следующие свойства *(аксиомы векторного пространства)*:

- $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$;
- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
- для любого $x \in V$ существует $y \in V$ такой, что $x + y = 0$;
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in F$ и $x \in V$;
- $1 \cdot x = x$ для единицы из поля F и любого $x \in V$;
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in F$, $x \in V$;
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $\alpha \in F$, $x, y \in V$.

В целях нашего курса поле скаляров всегда будет полем действительных чисел, но в очень многих ситуациях полезно рассматривать векторные пространства и над другими полями.